Rivista di Storia dell'Educazione

Firenze University Press
www.fupress.com/rse

OPEN ACCESS

Citation: Cerasaro, S., Scoppola, B., Tomassi, L. (2024). Il Liber Abbaci di Fibonacci e "l'origine delle cose" di Maria Montessori. *Rivista di Storia dell'Educazione* 11(2): 17-29. doi: 10.36253/rse-16333

Received: July 10, 2024

Accepted: September 25, 2024

Published: December 30, 2024

Data Availability Statement: All relevant data are within the paper and its Supporting Information files.

Competing Interests: The Author(s) declare(s) no conflict of interest.

Editor: Chiara Martinelli, Università di Firenze.

Il Liber Abbaci di Fibonacci e "l'origine delle cose" di Maria Montessori

Fibonacci's Liber Abbaci and "the origin of things" of Maria Montessori

Silvia Cerasaro, Benedetto Scoppola, Laura Tomassi

Università di Roma Tor Vergata, Italia
silvia.cerasaro@gmail.com; benedetto.scoppola@gmail.com; laura.tomassi1@gmail.com

Abstract. This article discusses some aspects of the arithmetic of Fibonacci's Liber Abbaci and the related pedagogical idea of the Pisan mathematician, described in the Prologue of the work and which can be seen from reading the text. This treaty indirectly influenced the teaching tradition in the Italian peninsula. One of manuscripts of the work was later rediscovered by Baldassarre Boncompagni and the first treatise on abacus in the European world returned to circulate in Italian cultural clubs in the Risorgimento period. Probably, Maria Montessori in her school experience came into contact with the work of Fibonacci which left a clear trace in her subsequent pedagogical proposals.

Keywords: Fibonacci, Montessori, Liber Abbaci, Psychoarithmetic.

Riassunto. In questo articolo si discutono alcuni aspetti dell'aritmetica del Liber Abbaci di Fibonacci e della relativa concezione pedagogica del matematico pisano, descritta nel Prologo dell'opera e che si evince dalla lettura del testo. Questo trattato influenzò indirettamente la tradizione didattica nella penisola italiana. Il codice dell'opera fu poi riscoperto per mano di Baldassarre Boncompagni e il primo trattato d'abaco del mondo europeo tornò a circolare negli ambienti culturali italiani nel periodo risorgimentale. Probabilmente, Maria Montessori nella sua esperienza scolastica entrò in contatto con l'opera di Fibonacci che lasciò una traccia evidente nelle sue successive proposte pedagogiche.

Parole chiave: Fibonacci, Montessori, Liber Abbaci, Psicoaritmetica.

INTRODUZIONE

Un'esigenza particolarmente sentita nell'Italia postunitaria è stata quella di dotare la nostra scuola di programmi di matematica all'altezza di quelli degli altri paesi europei. Poiché alcuni protagonisti del Risorgimento erano matematici di altissimo livello, questo ha portato a una discussione molto viva e di grande spessore culturale riguardo alle basi dei programmi stessi. Sappiamo per esempio che vi fu una accesa discussione riguardo all'opportunità di insegnare nella scuola superiore gli Elementi di Euclide, e questa discussione portò, con la curatela di Betti e Brioschi, all'edizione "ad uso dei ginnasi e dei licei" degli Elementi (Giacardi and Scoth 2013). Il testo di Betti e Brioschi costituì la base della formazione geometrica nei licei classici e negli istituti tecnici ad indirizzo fisico-matematico (quelli che oggi chiamiamo licei scientifici) per tutto l'Ottocento.

Nello stesso periodo ci fu la riscoperta del Liber Abbaci di Fibonacci, culminata nella pubblicazione dell'edizione critica curata da Boncompagni (Pepe 2016). Il Liber Abbaci ebbe una larga diffusione all'interno della comunità matematica dell'epoca ma non è facile ricostruire il suo impatto sulla didattica scolastica. Non sappiamo di testi scolastici basati direttamente su parti dell'opera di Leonardo Pisano, né abbiamo testimonianze dirette dell'utilizzo scolastico dell'edizione critica di Boncompagni.

Tuttavia è possibile ipotizzare che quest'ultima ebbe una certa diffusione nelle scuole a partire dall'opera di una delle grandi protagoniste della pedagogia del primo Novecento, Maria Montessori. Pur avendo compiuto studi universitari di tutt'altro genere (era infatti laureata in medicina) è abbastanza ovvio, a partire dalla lettura della sua opera, che Montessori aveva una preparazione matematica molto solida. Era stata allieva dell'istituto tecnico ad indirizzo fisico matematico Leonardo da Vinci di Roma, e sappiamo che nelle discipline scientifiche aveva eccellenti risultati (Scocchera 1993).

Molti anni dopo la sua esperienza scolastica, Montessori pubblicò in Spagna le sue uniche due opere di argomento disciplinare, "Psicoaritmetica" e "Psicogeometria". Mentre è possibile ritrovare negli "Elementi di Euclide" l'ispirazione di molte delle attività geometriche che Montessori propone agli alunni della scuola elementare (Boscolo et al. 2021), non si è fino ad ora molto indagato sulle fonti che hanno ispirato la sua opera riguardo all'aritmetica. Alcuni aspetti della prima presentazione dei numeri interi sono ispirati agli "Elementi di Euclide" (Boscolo et al. 2021), risalenti al 300 a.C., ma tutto quello che riguarda l'utilizzo del nostro sistema decimale posizionale e gli algoritmi delle operazioni aritmetiche non può essere riportato a quella fonte perché descritti per la prima volta nei trattati d'abaco medievali, diffusi nel mondo europeo a partire dal tredicesimo secolo.

In questo lavoro, dopo aver brevemente presentato alcuni aspetti matematici dell'opera di Fibonacci, vogliamo discutere in dettaglio alcune proposte di "Psicoaritmetica" che sembrano direttamente ispirate dal "Liber Abbaci", uno dei primi trattati d'abaco giunti in Europa (Gavagna 2013; Høyrup 2005). Dallo studio effettuato, si può ipotizzare che ci sia stata una ricaduta pedagogica del Liber Abbaci nella pratica scolastica della fine dell'Ottocento. Oltre agli aspetti storici di questa circostanza, ci sembra che essa sia interessante anche da un punto di vista pedagogico: il periodo più vivo in cui i migliori matematici italiani hanno discusso nel dettaglio di aspetti pedagogici li ha portati senza indugio a recuperare le fonti originali del pensiero matematico, quella "origine delle cose", nel linguaggio montessoriano, che risulta essere il linguaggio più naturale per far apprendere in modo vivo la matematica.

1. LEONARDO PISANO: UNA VITA PER LA MATEMATICA PRATICA.

1.1. Brevi cenni biografici di Fibonacci.

La vita di Leonardo Pisano viene rapidamente illustrata nel prologo del suo *Liber Abbaci*, dove le informazioni biografiche e pedagogiche si intrecciano con quelle di carattere matematico. Si pensa che alla pubblicazione del famoso trattato di aritmetica pratica egli poteva essere all'incirca trentenne, in quanto la sua data di nascita può essere fissata nel decennio tra il 1170 e il 1180 (Giusti 2016; Catastini and Ghione 2023).

Nelle prime righe del manoscritto del *Liber Abbaci* si trovano importanti informazioni: la sua prima data di composizione, l'anno 1202; la dedica ad un importante studioso del tempo, Michele Scoto, che aveva legami con la corte di Federico II; le migliorie apportate nella seconda edizione del Liber del 1228; alcune informazioni autobiografiche e personali. Altre opere scandiscono le date certe della vita di Leonardo Pisano: 1220 *Practica geometriae*; 1225 *Flos; Liber Quadratorum*; *Epistola ad Magistrum Thoedorum; Trattato di minor guisa*. L'ultima notizia certa della vita di Fibonacci risale al 1241, quando un documento lo vedeva ancora matematico attivo ed al servizio del Comune di Pisa. Il giovane Leonardo, dopo la sua formazione a Pisa, ebbe i migliori maestri nel suo soggiorno a Bugia durante i suoi viaggi nel Mediterraneo. Non è facile risalire alle fonti che, però possono essere ricondotte a due grandi gruppi: i testi della tradizione araba e quelli della tradizione greco-latina.

La tradizione araba influenzò il suo pensiero in campo aritmetico e algebrico: si ispirò maggiormente alla matematica di Al-Kwarizmi, le cui opere circolavano già in Europa e nella penisola italica grazie alle traduzioni effettuate da Roberto da Chester nel 1145 e da Gherardo da Cremona nel 1150. In riferimento alla tradizione greco-latina, la maggiore influenza fu data dagli Elementi di Euclide, come testimoniano molti passi del "Liber Abbaci" e della "Pratica Geometriae": in queste opere Leonardo enuncia in modi diversi gli stessi risultati mostrando una conoscenza puntuale dell'opera di Euclide, citato molto spesso anche con appellativi come «peritissimo geometriae Euclide…» (Boncompagni 1857, p. 21) Egli scrisse anche un commentario al X libro degli "Elementi", di cui si possono trovare i risultati nel capitolo XIV del "Liber Abbaci", e conosceva anche un compendio ai libri XIV e XV degli "Elementi", trasmessi insieme alla versione greco-latina: non è escluso, come ritiene Busard, che sia stato proprio lui a compilare tale testo (Folkerts 2004).

2.2. Il pensiero pedagogico di Leonardo Pisano

Nel Prologo del "Liber Abbaci", Leonardo tratteggia le tracce della sua formazione culturale ma anche l'idea di come insegnare la matematica, attraverso una metodologia ben precisa, con una teoria didattica nella quale "la dottrina del numero" si fonda sul legame imprescindibile tra l'aritmetica e la geometria euclidea:

> E poiché la scienza aritmetica e quella geometrica sono connesse e si sostengono a vicenda, non si può trasmettere una piena dottrina del numero se non intersecandola con alcuni concetti di geometria o spettanti alla geometria, che in questo caso pratica il giusto modo di operare sui numeri (traduzione di Boncompagni, 1857, p. 1, presente sul sito www.progettofibonacci.it).

Ciò che colpisce particolarmente è la modernità del concetto dell'apprendimento attraverso la pratica e l'uso delle mani

> Così chi volesse conoscere bene la pratica di questa scienza dovrà applicarsi con uso continuo ed esercizio giornaliero nella pratica di essa, perché se la conoscenza si muta in abitudine attraverso la pratica, la memoria e l'intelligenza concordano a tal punto con le mani e i segni che quasi in un unico impulso e anelito, in uno stesso istante, si accordano naturalmente su tutto; e allora quando il discepolo avrà conseguito un abito mentale, a poco a poco potrà pervenire facilmente alla perfezione di questa (Boncompagni 1857, p. 1).

L'uso delle mani per migliorare l'apprendimento della matematica mostra qui le sue origini antichissime ed è allo stesso tempo un concetto modernissimo in didattica, oltre a rappresentare uno degli aspetti fondamentali della proposta pedagogica di Maria Montessori (Freitas e Sinclair 2012; Montessori 2012, p. 8). Ciò trova fondamento nelle moderne neuroscienze. È stato provato che l'uso dell'approccio percettivo porta a risultati positivi apprezzabili, sia nella didattica della geometria che in quella dell'aritmetica: infatti, sperimentazioni condotte in diversi ordini di scuola dimostrano che l'uso di materiali manipolabili facilita l'apprendimento duraturo di concetti matematici (Tomassi 2021; Scoppola 2022; Dehane 2009; Pasquazi, 2020).

2.3. Cenni su alcuni contenuti aritmetici del "Liber Abbaci"

Il "Liber Abbaci" è sicuramente ricordato per aver fatto conoscere un sistema di numerazione molto più vantaggioso di quello romano: il sistema decimale posizionale in uso ancora oggi. Nell'incipit dell'opera (Figura 1) sono descritti i simboli o "figure" di tale sistema.

Il segno 0, cioè lo zero, fa il suo ingresso nel mondo occidentale: un *signum* che solo è privo di significato, chiamato *zephirum*, che, invece, scritto alla destra delle altre figure, le fa aumentare notevolmente di valore. Un'altra novità che compare nel *Liber Abbaci,* a partire dal quinto capitolo, è il concetto di "numero rotto", che oggi chiamiamo "frazione propria", cioè il numero che si ottiene rompendo l'intero in *n* parti uguali. Il numero rotto esprime il resto di una divisione tra due numeri interi, uno non multiplo dell'altro, ed indica, quindi, un numero come un quoziente non svolto, per la prima volta nel mondo greco-latino, che però conosceva profondamente il concetto di rapporto tra grandezze, descritto negli "Elementi di Euclide". Leonardo lo descrive nel seguente modo:

> Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato (denominatore) e quello superiore è chiamato denominante (numeratore) (traduzione di Boncompagni, 1857, p. 24, presente sul sito www.progettofibonacci.it).

Dalla definizione data emerge che un numero rotto, chiamato da Leonardo anche numero minuto e numero fratto, si costruisce considerando prima il numero

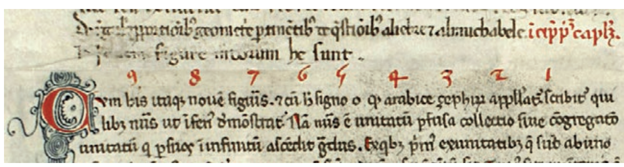


Figura 1. Incipit primum Capitulum, Conv. Soppr. C.1. 2616, ff. 1r-214r, BNCF.

di parti in cui si divide l'intero ("quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta"), per poi considerare alcune di esse. Il significato matematico associato a questa definizione suggerisce una costruzione mentale che, unita al linguaggio usato da Fibonacci (numero rotto, è sinonimo di numero minuto nel "Liber Abbaci", per sottolineare il suo valore numerico rispetto all'intero) facilita l'apprendimento del concetto di frazione, in quanto quel gesto e quelle parole diventano simboli che si riferiscono allo stesso significato matematico (Cerasaro 2020). Tenendo in considerazione questo aspetto, anche il concetto di numero misto, ovvero un intero sommato ad un numero rotto, facilita il modo di visualizzare il valore di quelle che oggi chiamiamo frazioni improprie sulla retta dei numeri.

Nel capitolo VIII del "Liber Abbaci" si introducono problematiche relative a questioni commerciali che necessitano per la loro soluzione di strumenti matematici, che Leonardo Pisano trova nella tradizione euclidea: egli detta una regola che permette di stabilire quantitativamente e velocemente il modo di confrontare il costo di una merce con un'altra della stessa specie. Si tratta di trovare l'«ignotus numerus per notos» (Boncompagni 1857, p. 83) mediante l'uso di un diagramma algoritmico che permette di risolvere problemi di proporzionalità diretta, descritto come segue: "Il primo numero **A**, dice Leonardo, è il *numero della vendita* di una merce (ossia la sua quantità come *peso o misura);* il secondo **a** è il "*costo della vendita*" espresso in una delle monete correnti; il terzo **B** una qualche quantità della merce in vendita, il cui costo, cioè il quarto numero **X**, non si conosce.

A = quantità di una merce **a** = costo di A
B = una seconda quantità della stessa merce
A, a, B sono noti, X è il costo della quantità B (Figura 2)

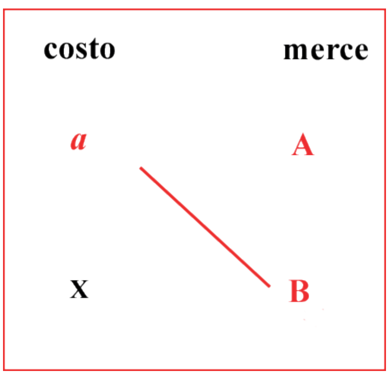


Figura 2. Ricostruzione del diagramma risolutivo per la regola del 3 descritto da Fibonacci.

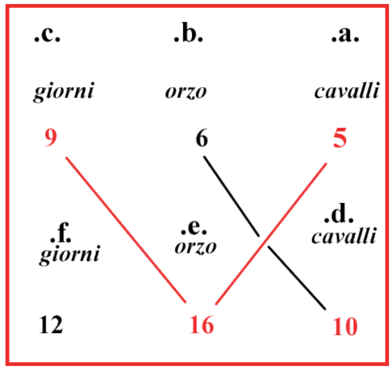


Figura 3. Ricostruzione del diagramma risolutivo per la regola del 5 descritto da Fibonacci

Nel capitolo IX, Leonardo Fibonacci espone invece la *Regula universalis in baractis mercium* (Boncompagni 1857, p. 118), che permette di confrontare tra loro merci diverse per valutare l'equità dello scambio: egli spiega nel dettaglio il diagramma risolutivo delle problematiche di scambio delle merci, ma lo fa con un "problema figurato" tipico della sua didattica quello dei «"cavalli che mangiano orzo nei giorni proposti"… Cinque cavalli mangiano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si chiede in quanti giorni, nel medesimo modo, dieci cavalli mangeranno 16 sestari» (Boncompagni 1857, p. 133) (Figura 3). Risulta che $a \times e \times c = d \times b \times f$, per cui $\frac{e}{f} = \frac{d \times b}{a \times c} = \frac{d}{a} \times \frac{b}{c} = \frac{d}{c} \times \frac{b}{a}$.

2. LA MATEMATICA DI FIBONACCI NELL'ITALIA POSTUNITARIA

2.1. La riscoperta di Leonardo Pisano e la sua matematica nella scuola post-unitaria

I concetti matematici presentati nelle opere di Leonardo Pisano non ebbero successo per diverso tempo, nonostante le grandi novità introdotte nel mondo greco-latino. In tempi prossimi alla stesura delle prime edizioni del "Liber Abbaci" molti autori dei trattati d'abaco in lingua volgare si ispirarono a questa grande opera e permisero la diffusione della matematica pratica tra i mercanti. Ciò nonostante, le opere di Leonardo Pisano non si diffusero tra i suoi contemporanei, molto probabilmente perché il livello della matematica trattata non era facilmente comprensibile dagli studiosi del tempo in quanto di un livello elevato (Hoyrup 2019). La sorte dei contenuti scientifici delle opere del matematico pisano venne condivisa anche da un altro importante matematico attivo in Europa, Giordano da Nemi, che, influenzato dalla matematica araba, cercò di migliorare l'aspetto teoretico della matematica medievale, riprendendo gli Elementi di Euclide ed integrandoli alle nuove conoscenze (Hoyrup 2019). In generale, i primi trattati d'abaco non ebbero successo forse anche per la paura di accuse di eresia, come era avvenuto per gli autori di alcune opere provenienti dalla cultura non cristiana (Pepe 2016). La matematica araba e il sistema numerico che utilizzava le figure indiane vennero ostacolati in alcuni stati della penisola italiana e ciò è testimoniato da documenti che ne vietano l'uso, nonostante l'aritmetica scritta, che faceva uso dell'attuale sistema decimale posizionale, fosse più vantaggiosa di quella strumentale quando si hanno grandi numeri o varie successioni di operazioni (Pepe 2016) poiché basata sull'uso necessario dell'abaco. Il matematico pisano era conosciuto ai suoi tempi e a quello dei posteri (come ad esempio Pacioli) per le innovazioni apportate in campo matematico grazie all'introduzione dell'elevata aritmetica araba, ma molto presto si persero le sue tracce. Un allievo di Commandino (1509-1575) inserì in una sua opera un articolo su Fibonacci collocandolo, cronologicamente al 1400, testimoniando anche la mancata considerazione delle sue opere: infatti, nel 1707, in un testo riguardante la vita dei matematici, stampato ad Urbino, non vi è alcuna traccia di Fibonacci. Durante l'Illuminismo, Diderot e D'Alembert, nel primo volume dell'*Encyclopédie*, definiscono Pacioli discepolo di Leonardo da Pisa mentre intorno alla metà del 1700 a Venezia, Francesco Antonio Zaccaria collocò, finalmente, in maniera corretta dal punto di vista storico Leonardo Pisano. Con il ritrovamento di due codici del "Liber Abbaci" nella prima metà del diciottesimo secolo da parte di Bernardino Zaccaria, cominciò la riscoperta di Fibonacci e delle sue opere, continuata da Pietro Cossali e Giambattista Guglielmini, che effettuarono la prima valutazione critica delle opere di Leonardo. Molto probabilmente, Baldassarre Boncompagni si ispirò ai loro studi per il grande lavoro svolto su Leonardo Pisano e tutte le sue opere nel 1857 (Pepe 2016).

Nel consultare alcuni testi didattici del diciannovesimo secolo, possono essere riscontrate trattazioni di argomenti matematici ispirati indirettamente alle opere di Fibonacci, seguendo la tradizione dei trattati delle scuole d'abaco. In pochi di essi si è resa esplicita l'influenza di Leonardo Pisano. Ad esempio, nel "Trattato di Aritmetica dimostrata" di Mondini (1849), si nota un passo in cui si ipotizza che le figure indiane siano state introdotte in Europa da Gerberto d'Aurillac (Mondini 1849, p. 3), senza fare alcun riferimento, invece, al primo utilizzo degli algoritmi dell'aritmetica araba, introdotta da Fibonacci nella penisola italiana. Ciò è giustificato dal fatto che, nel momento di composizione del trattato, Mondini molto probabilmente non era venuto a contatto con nessuna opera di Fibonacci, anche perché precedente al grande lavoro compiuto da Boncopagni.

17. Le cifre aritmetiche erano del tutto ignote agli antichi. Da quanto si sa pare che esse siano state introdotte dai Mori nella Spagna, e che quindi nel X secolo il dotto Gerberto, Monaco d'Orleans, che fu poi Pontefice sotto il nome di Silvestro II, le fece porre in uso nella Gallia, e presso le altre nazioni d' Europa.

Mondini (1849, p. 3).

Nel resto del testo, però, si nota l'influenza della tradizione abbacista italiana, trasmessa in forma anonima nel corso dei secoli e testimoniata dalla modalità di trattazione dei contenuti aritmetici, come nella maggior parte dei testi del periodo, dei quali vogliamo ricordare gli "Elementi di Aritmetica" di Amante (1841).

La conoscenza di Leonardo e di alcuni problemi trattati nelle sue opere è evidente in Peano nei "Giochi di Aritmetica e problemi interessanti" in quanto il matematico lo cita espressamente nella soluzione dei problemi proposti (Peano 1924, pp. 5-6, 11, 14, 16, 20-21, 30).

Nella seconda metà dell'Ottocento in Italia il mondo dell'Istruzione è caratterizzato da un intento riformistico e fondante. La legge Casati del 1859 è stata in vigore fino alla Riforma Gentile del 1923 ed aveva come fine ultimo dell'istruzione scolastica la formazione di una classe dirigente colta ed umanistica: l'università era il fine della gioventù che aveva la possibilità di dedicarsi agli studi ginnasiali e liceali. Parallelamente scorreva chi si dedicava alla frequenza degli istituti tecnici, che non davano accesso all'università ad eccezione dell'indirizzo fisico matematico. Proprio in questo tipo di scuola crebbero menti di illustri matematici (Volterra, Severi ad esempio) e la mente illuminata di una pedagogista sorprendentemente moderna per il suo tempo, Maria Montessori, forse provvidenzialmente relegata dai suoi studi tecnici alla frequenza della facoltà di biologia (Trabalzini 2015; Trabalzini 2007). Inoltre, proprio questo tipo di scuola fu oggetto di molta attenzione da parte di Luigi Cremona, che scrisse un importante testo di Geometria proiettiva. In realtà le attività culturali di Cremona a favore della scuola erano di respiro più ampio e radicale: egli fu attivo nella stesura dei programmi del decreto Coppino del 1867. Il suo pensiero a proposito della geometria, per la quale materia ripristinò come libro di testo gli "Elementi di Euclide" (Betti e Brioschi 1868) è il seguente:

> Insegnata col metodo degli antichi – scrive Cremona – la geometria è più facile e più attraente che non la scienza astratta dei numeri. (…) Si raccomanda al docente che si

> attenga al metodo euclideo, perché questo è il più proprio a creare nelle menti giovanili la abitudine al rigore inflessibile nel raziocinio. Soprattutto non intorbidi la purezza della geometria antica, trasformando teoremi geometrici in formole algebriche, cioè sostituendo alle grandezze concrete (…) le loro misure" (cit. in Giacardi 2006).

Colpisce una riflessione: in quegli anni Baldassarre Boncompagni, riportava alla luce dopo secoli di buio il testo del "Liber Abbaci" di Leonardo Pisano detto Fibonacci. Nel paragrafo precedente è stato esposto il pensiero didattico e pedagogico di Leonardo Pisano attraverso le parole che egli usa nel Prologo del "Liber Abbaci". È inevitabile pensare che Maria Montessori, che in quegli anni frequentava la "Regia scuola tecnica" di Roma, fosse fortemente influenzata dalla sua formazione giovanile quando ebbe a dire il 5 maggio 1931

> Fino a una certa epoca aritmetica e geometria procedevano unite, poi fu necessario dividerle. Ma la cosa più semplice e più chiara è l'origine delle cose: come ripeto sempre, il bambino deve avere l'origine delle cose perché l'origine è più chiara e più naturale per la sua mente. Noi dobbiamo solo trovare un materiale che renda l'origine accessibile (Scoppola, 2022).

Certo è che non può sfuggire il denominatore comune tra le due visioni didattiche così lontane nel tempo, quella di Maria Montessori e di Leonardo Pisano: entrambe considerano l'inscindibilità di aritmetica e geometria e sollecitano l'apprendimento attraverso la percezione e la stimolazione periferica, tanto importante per le moderne teorie neuroscientifiche (Scocchera 1993).

2.2. Il Liber Abbaci nella formazione di Maria Montessori

La formazione scolastica di Maria Montessori condizionò senza dubbio il suo pensiero e i suoi scritti. Un esempio lampante è l'influenza dello studio della geometria euclidea in "Psicogeometria" (Scoppola 2011).

Nella lettura degli ultimi due capitoli di "Psicoaritmetica", dedicati al sistema metrico decimale e alle proporzioni, appare una chiara relazione tra i contenuti presentati nella trattatistica d'abaco e nel libro di Maria Montessori. Infatti, è molto simile la presentazione dell'importanza delle scienze astratte che convergono a studiare e qualificare gli oggetti reali; in secondo luogo si può riconoscere la stessa sequenza con la quale i problemi riguardanti le unità di misura e le grandezze fisiche vengono trattati; infine, ma forse principalmente, i problemi di realtà dell'opera di Montessori hanno lo stesso aspetto dei «problemi di realtà storica» (Tomassi, 2023) del "Liber Abbaci" di Leonardo Fibonacci. Si tratta di brevi racconti legati alla realtà economica molto spesso aventi un fondo di verità, che riconducono a problematiche matematiche di natura generale. Ne è un esempio il paragrafo che Maria Montessori chiama «problema in forma di favola»: viene riportato essenzialmente un racconto d'avventura da un libro di Verney L. Cameron, dove le leggi del baratto presso le popolazioni africane servono a fornire l'origine del significato del valore del denaro. Lo schema didattico utilizzato da M. Montessori è fortemente analogo a quello che nel "Liber Abbaci" compare come "regola del cinque".

Quando Maria Montessori scrisse "Psicoaritmetica", nella tradizione italiana dei testi d'aritmetica e nei programmi della scuola sino alla Riforma Gentile, compariva la classificazione dei numeri in "astratti" e "concreti". Tra i numeri concreti, ovvero quei numeri che, oltre ai numeri astratti o puri, erano accompagnati inscindibilmente da unità di misura, venivano definiti i "numeri complessi", cioè quei numeri con cui si quantificavano grandezze le cui unità di misura non erano necessariamente in relazione decimale, ma erano pluribasiche; l'aggettivo complesso molto probabilmente venne attribuito poiché diventò difficile fare i conti con tale numero quando non si aveva una quantità intera. Questa classificazione sopravvisse per molto tempo a causa delle differenti unità di misura utilizzate negli Stati prima dell'Unità, differentemente dal resto d'Europa dove il sistema decimale posizionale si era largamente diffuso. Il fatto che Maria Montessori non ne abbia tenuto affatto in considerazione, contrariamente a chi scrisse solo in seguito le note al testo, ci permette di capire che la studiosa non considerava i testi del tempo in cui visse e che il suo spirito di tornare «alla origine delle cose» l'abbia avvicinata ai testi del passato in cui tale numero non compariva: tra tali testi c'erano sicuramente gli "Elementi di Euclide" e non si può escludere il "Liber Abbaci", vista la conoscenza del testo anche in ambienti accademici (si pensi a Peano e ai matematici della sua scuola).

3. I CONTENUTI DELLE SCUOLE D'ABACO NELLA PROPOSTA DI MARIA MONTESSORI

3.1. La Moltiplicazione a Scacchiera

Sfogliando il "Liber Abbaci" di Leonardo Pisano, al margine del par.2, cap. III, si nota un diagramma in cui è rappresentata una "scacchiera" (Figura 4), attraverso la quale è descritta una modalità di svolgimento di una moltiplicazione (Boncompagni 1857, p. 19).

Si disegna una scacchiera di $n+1$ quadretti per m quadretti, dove n e m sono, rispettivamente, il numero di cifre del primo e del secondo fattore. Si dispongono i

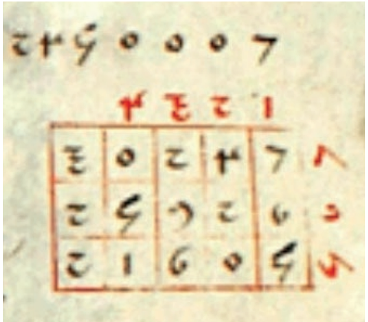


Figura 4. Moltiplicazione a scacchiera dal sito www.progettofibonacci.it (Ultimo accesso: 26 Settembre 2024).

due fattori attorno alla scacchiera, il primo in alto, con la cifra delle unità nel riquadro più a destra, il secondo a destra, con la cifra delle unità nel riquadro più in alto. In ogni quadretto si inserisce il risultato del prodotto delle cifre dei fattori che identificano la riga e la colonna del riquadro stesso, ponendo le unità nel quadrato e riportando le decine in quello alla sua sinistra. Per ottenere il risultato si sommano i quadretti lungo le diagonali (con eventuali riporti) iniziando da destra in alto.

Leonardo Pisano descrive così il prodotto effettuato con la scacchiera:

> Ebbene c'è un altro modo di moltiplicare molto pregevole soprattutto per le moltiplicazioni di grandi numeri, che mostrerò nella moltiplicazione di 567 in 4321. Si costruisca un quadrilatero in forma di scacchiera, che abbia cinque posti in lunghezza, cioè uno in più del numero delle figure del numero maggiore, e con tre posti in altezza, quante sono le tre figure del numero minore, e si ponga il numero maggiore sopra il detto quadrilatero, e il minore si ponga davanti ad esso, come qui si vede (Figura 5)

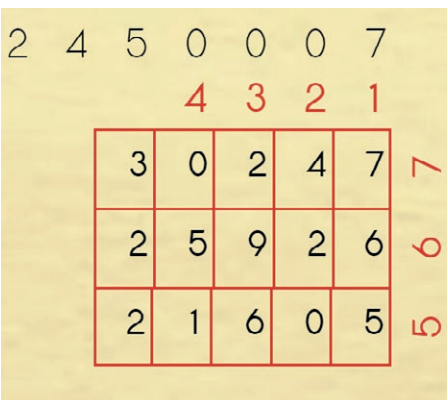


Figura 5. Immagine tratta dal sito www.progettofibonacci.it, a margine del paragrafo III.2.

> e si moltiplichi la prima figura del numero minore, cioè 7, per 1, cioè per la prima del numero maggiore, fa 7, che si ponga al primo posto della linea superiore, cioè sotto l'1, e si moltiplichi 7 per la seconda figura del numero maggiore, cioè per 2, si avrà 14, si ponga il 4 sotto il 2 dopo il 7 posto, cioè al secondo posto della linea superiore, e si tenga l'1, al quale si aggiunga la moltiplicazione di quello stesso 7 in 3, sarà 22, si ponga 2 al terzo posto dopo il 4 messo, e si conservi il 2, al quale si aggiunga la moltiplicazione di 7 per 4, cioè per l'ultima figura del numero maggiore, sarà 30, dal quale si ponga 0 in quarta posizione e 3 nella quinta.
> E nello stesso modo di moltiplicherà il 6 singolarmente per 1 e per 2 e per 3 e per 4, avremo 6 al primo posto della seconda linea, e 2 nella seconda, e 9 nella terza, e 5 nella quarta, e 2 nella quinta; e lo stesso si faccia del 5 che è in ultima posizione del numero minore, e si avrà 5 al primo posto della terza linea, e 0 nel secondo, e 6 nel terzo, e 1 nel quarto, e 2 nel quinto (Figura 6).

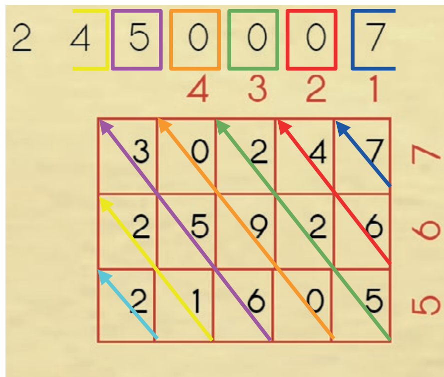


Figura 6. Schema esplicativo dell'uso della scacchiera nella moltiplicazione.

> Poi dal 7 che è posto al primo posto si ponga 7 sopra l'1, e si aggiungano 6 e 4 che sono opposti a vicenda; dopo quel 7 sarà 10: si ponga lo 0 sopra il 2 e si tenga l'1 che si aggiunga a 5 e a 2 e a 2 che a loro volta sono opposti in croce: dopo i sopraddetti 6 e 4 sarà 10: si ponga di nuovo 0 sopra la terza posizione, cioè sopra il 3 e si tenga di nuovo 1, che si aggiungerà al 6 e il 5 e il 3 che sono nella seguente opposizione: sarà 15; si ponga in quinta posizione e si tenga 1, che si aggiunga a 1 e 2 che sono nella seguente opposizione: sarà 4 che si pone in sesta posizione. Di seguito si ponga 2 in settima posizione che si trova nell'angolo del quadrato dopo la detta opposizione di 1 e 2 e si avrà il prodotto prestabilito (traduzione di Boncompagni, 1857, p. 19, presente sul sito www.progettofibonacci.it).

La moltiplicazione a scacchiera del 1202 sembra essere l'antenata di un altro tipo di moltiplicazione, detta a "gelosia" o a "graticola" (Figura 7), di cui si trovano testimonianze in Pacioli (1523) ed utilizzata da Nepero

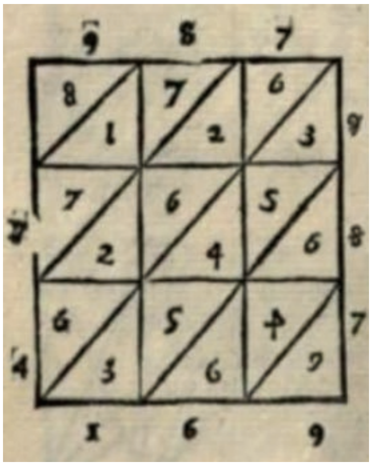


Figura 7. Immagine della moltiplicazione a graticola presente nell'opera *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* di Pacioli (1523).

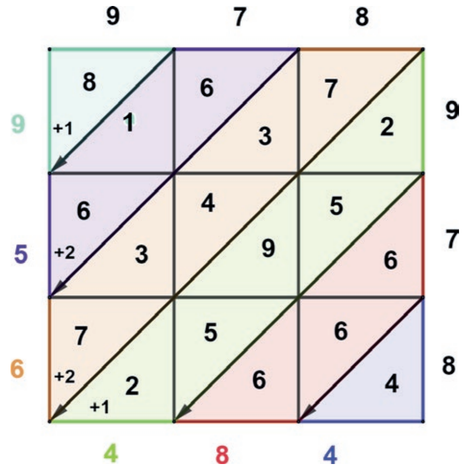


Figura 8. Schema esplicativo dell'uso della graticola nella moltiplicazione.

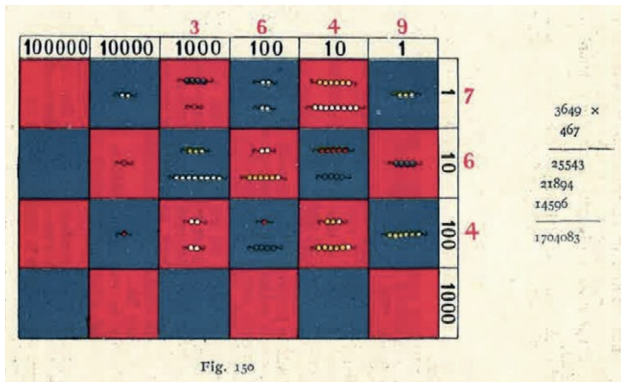


Figura 9. dalla versione spagnola di "Psicoaritmetica", Fig. 150 di p. 208.

per la realizzazione dei suoi bastoncini, utili strumenti di calcolo (Cerasaro, 2020; Nepero, 1628). La novità della moltiplicazione a graticola, che non è presente nel "Liber Abbaci" di Fibonacci, è che i riporti non devono essere ricordati ma sono scritti all'interno di essa in quanto in ogni quadrato la diagonale individua la parte superiore delle decine e quella inferiore delle unità.

La costruzione della graticola è del tutto simile a quella vista per la scacchiera, ma ciascun quadrato individuato dall'incrocio di una riga con una colonna resta diviso in due triangoli da una diagonale che parte dal vertice in alto a destra ed arriva in quello in basso a sinistra. Nel triangolo inferiore si dispongono le unità del prodotto mentre le decine sono poste in quello superiore. Effettuato ciascun prodotto riga per colonna, si passa a sommare tutti i numeri seguendo le fasce diagonali come riportate nello schema in figura (Figura 8), avendo l'accortezza di tenere a mente il riporto da sommare nella fascia successiva. Il risultato del prodotto sarà leggibile partendo dal lato di sinistra, procedendo dall'alto verso il basso e proseguendo nel lato in basso da sinistra verso destra (956484 in Figura 8). Tale algoritmo, come anche quello della moltiplicazione a scacchiera, è lo stesso usato ancora oggi per fare la moltiplicazione: l'apparente differenza sta nella schematizzazione grafica che permette di sommare in diagonale per evitare di considerare ogni volta l'ordine dei riporti delle singole somme.

Chi conosce la moltiplicazione a scacchiera di Maria Montessori avrà notato grosse analogie nella descrizione di Leonardo Pisano. Nella versione spagnola di "Psicoaritmetica", la dettagliata descrizione che la pedagogista effettua in merito al *Juego del tablero,* supportata dalle figure 150, 151 e 152, ricorda decisamente la moltiplicazione che Fibonacci descrive nel suo "Liber Abbaci", come si può notare dalle parole della studiosa: «Viene preparato un rettangolo in modo che rappresenti spazi quadrati, in due colori disposti in file diagonali, come un tabellone della dama. Il tabellone è rettangolare e ha un lato di 4 quadrati e l'altro di 6 o più» (Figura 9).

> I quadrati hanno un lato di circa 7 cm e al loro interno si inserisce un bastone di nove perle. In alto e a destra, in corrispondenza dei quadrati, è indicata la gerarchia dei numeri: 1, 10, 100, 1000, ecc. in modo tale che l'unità semplice inizi su entrambi i lati del quadrato più vicino a destra. Sopra queste indicazioni ci sono degli spazi vuoti dove sono i posti numeri, sopra quelli del moltiplicando, a destra quelli del moltiplicatore. I prodotti relativi alle unità del moltiplicatore vengono posti nella fila di quadrati superiori, quelli delle decine nella seconda, ecc., cioè sulla riga che corrisponde a ciascuna cifra del moltiplicato-

re, iniziando sempre dal primo quadrato a destra di ogni riga. Lo stesso vale se moltiplichi unità per unità, ovvero migliaia del moltiplicatore, iniziando sempre dal primo quadrato della riga. Se il numero di un prodotto risulta da due cifre ad esempio 6x3 18, l'1 e l'8 vengono posizionati in due quadrati adiacenti della stessa linea, uno a sinistra di 8 (Montessori 1934, p. 208; traduzione degli Autori).

Si legge dal testo che, nell'effettuare i prodotti parziali, si utilizzano le perline, da cambiare al passaggio successivo in cui si effettuano le addizioni (Montessori 1934, pp. 208-10). Ad esempio, nel fare 36497, procede nel seguente modo (Figure 10a-10b):
che diventa:

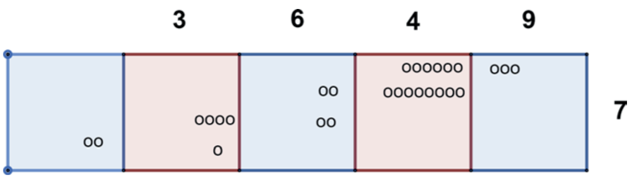


Figura 10a. prodotto parziale di 36497.

avendo effettuato il cambio ogni 10 perline.

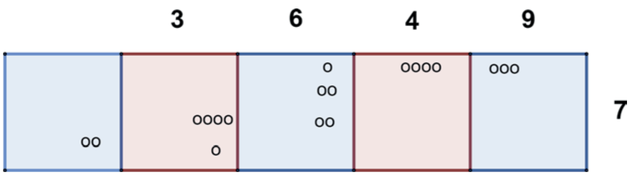


Figura 10b. Prodotto con cambio.

Anche la somma in diagonale per arrivare al prodotto finale segue lo stesso verso del trattato medievale (Figura 11).

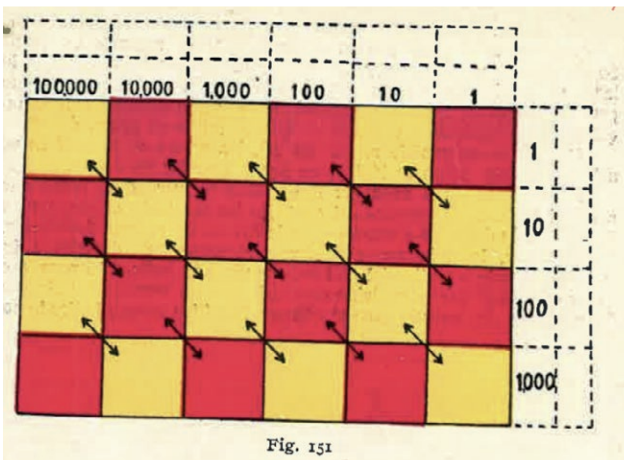


Figura 11. dalla versione spagnola di "Psicoaritmetica", Fig. 151 di p. 209.

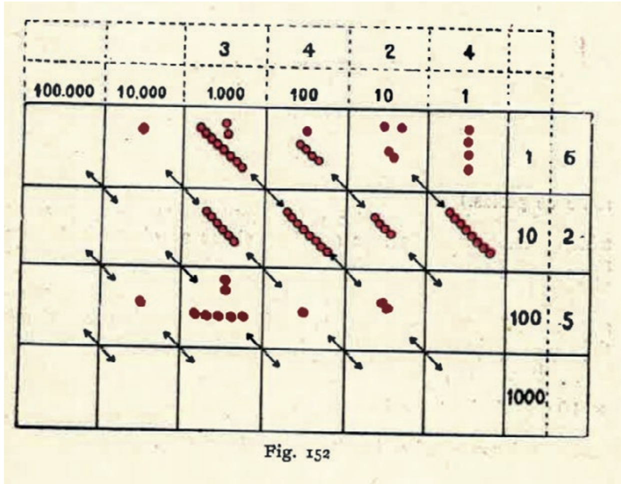


Figura 12. dalla versione spagnola di "Psicoaritmetica", Fig. 152 di p. 209.

Montessori scrive ancora: «Al termine dell'operazione, molti quadrati appaiono occupati da diversi gruppi di perle. ad esempio, moltiplicando 3424526 si otterrebbe la distribuzione delle Perle mostrata nella figura 152» (Figura 12) (Montessori, 1934, p. 209).

Può essere interessante notare che la pratica montessoriana degli anni successivi ha portato a modificare questo aspetto: nella versione italiana di "Psicoaritmetica" (Montessori, 1934; 2013), del 1971, curata da Grazzini, la moltiplicazione a scacchiera viene descritta con l'ausilio della figura 169, ove si notano una posizione differente del primo fattore e della somma in diagonale (Montessori 1934; Grazzini 1971, p. 243).

Cattura particolarmente l'attenzione anche l'uso di alcune parole, come se fossero prese dalla descrizio-

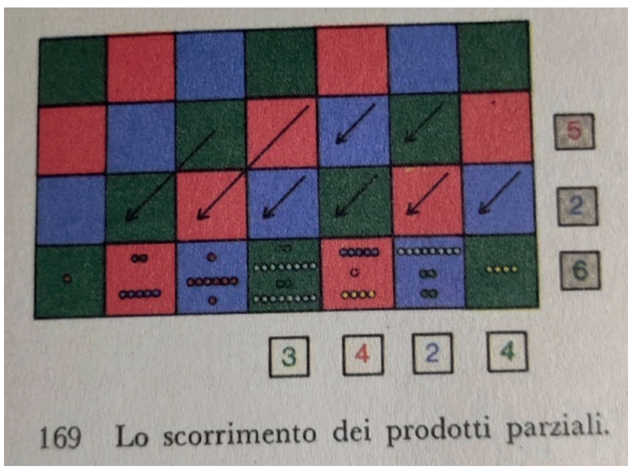


Figura 13. Fig. 169 di Montessori, 2013, p. 243.

ne latina di Leonardo Pisano: ad esempio, lui parla «in angulo quadrati (…si ponga 2 in settima posizione che si trova nell'angolo del quadrato dopo la detta opposizione di 1 e 2 e si avrà il prodotto prestabilito)» e la Montessori utilizza «cuadrato del angulo (nel primo quadrato dell'angolo ci sono le unità semplici, poi le decine, poi centinaia, ecc.) (Montessori 1934, p. 210)», con la differenza, però, nel riferimento al tipo di quadrato: Fibonacci usa queste parole per indicare la prima cifra a sinistra del prodotto, quella di valore maggiore, la Montessori, invece, per indicare le unità semplici, quelle più a destra, di valore minimo, indicate da Fibonacci per mezzo delle figure indiane scritte accanto. Ciò nonostante ci sembra evidente la presenza nel testo montessoriano di un contenuto della tradizione abbacista italiana di cui il *Liber Abbaci* è sicuramente l'opera Princeps.

3.2 La regola del tre

Nel primo paragrafo del capitolo VIII del "Liber Abbaci" viene esposto da Fibonacci il modo di «procurarsi il prezzo delle merci nel modo migliore»: si tratta di una procedura matematica nota nella tradizione abbacista come "regola del tre". L'autore spiega come di consuetudine la regola prima retoricamente e poi in maniera diagrammatica:

> Ma prima mostrerò da dove procede questo modo: infatti nei grandi commerci ci sono, come ho detto prima, quattro numeri in proporzione, cioè come il primo sta al secondo, così il terzo sta al quarto, cioè come il numero di una qualche quantità di merce sta al numero della quantità del suo costo, il numero di una qualunque altra quantità della stessa merce sta al numero del suo costo: oppure come una certa quantità di una merce qualsiasi sta a una quantità qualunque della stessa merce, allora nello stesso modo il costo dell'uno sta al costo dell'altro: e quando le quattro quantità sono così proporzionali, la moltiplicazione della seconda per la terza sarà uguale alla moltiplicazione della prima per la quarta, come è dimostrato in aritmetica e in geometria: per cui se solo la quarta quantità è ignota, essa proviene dalla seconda quantità per la terza, divisa per la prima, appunto dalla divisione: e perciò quando si divide un qualche numero per un qualche numero, e quando dalla divisione ne provenga un altro, se moltiplicherai il numero che ne proviene (il quoziente) per il divisore sicuramente di lì verrà il numero diviso (traduzione di Boncompagni, 1857, p. 84, presente sul sito www.progettofibonacci.it) (Figura 14).

La frase «come è dimostrato in aritmetica ed in geometria» si riferisce come altre analoghe alla matematica degli "Elementi di Euclide". La regola del tre da Fibonacci viene chiamata «regola universale». Nel resto

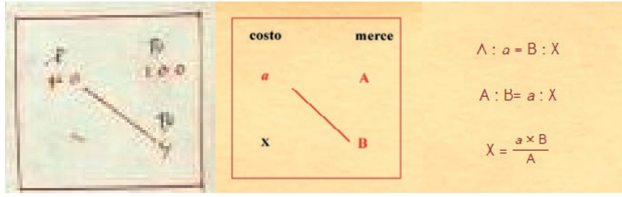


Figura 14. La "regola del tre" nel "Liber Abbaci" ed una sua raffigurazione moderna sul sito di Progetto Fibonacci

del "Liber Abbaci" la regola esposta viene utilizzata per risolvere problemi di vario tipo e spesso nelle procedure di «falsa posizione» (*regula arboris* in Fibonacci). Sempre ponendo attenzione alla risoluzione di problematiche commerciali, nel capitolo IX del Liber Leonardo espone la regola universale del baratto, pratica che affiancava all'epoca una nascente economia monetaria utilizzando un diagramma, noto più tardi come "regola del cinque" (Cipolla 1957). Di sei quantità 5 sono note ed una incognita: in un diagramma, che permette, una volta disposti correttamente i dati, di trovare la soluzione, i dati sono disposti su 3 colonne e 3 righe. Sulla prima colonna abbiamo l'unità di misura per le merci del primo tipo, la merce A e la merce X, sulla seconda colonna l'unità di misura per i costi, il costo a di A e il costo b di B, sulla terza colonna l'unità di misura per le merci del secondo tipo, la merce B e la merce Y.

Il diagramma favorisce la memorizzazione visiva dei dati ed indica anche le operazioni da eseguire: due linee diagonali che congiungono 4 numeri dati, indicano che la soluzione del problema si ottiene in ogni caso, sia che si cerchi X che si cerchi Y, moltiplicano i numeri sulle diagonali e dividendo il risultato per il prodotto dei numeri restanti proprio perché il prodotto dei numeri sulle due linee spezzate X × a × B e A × b × Y sono uguali. Nei paragrafi successivi (IX.1.3) Fibonacci spiega che l'origine di questo algoritmo risiede nel teorema di Tolomeo (in realtà di Menelao) così come riportato nell'Almagesto e riferito da Ametus.

È molto evidente l'analogia tra quanto appena riportato ed il contenuto dell'ultima parte di "Psicoaritmeti-

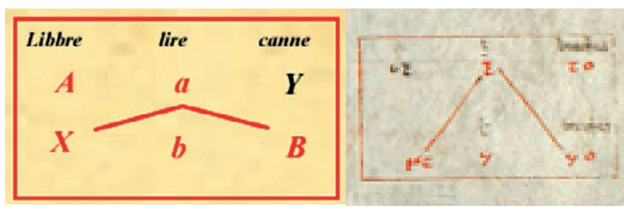


Figura 15. Diagramma della regola del cinque in www.progettofibonacci.it e nel "Liber Abbaci" (pagina iniziale capitolo nono del Liber abbaci Conv. Sopp. C.I. 2616, BNCF, folio 48 verso - 49 recto).

Cuando se entra en un argumento práctico, es necesario que en él intervengan varias disciplinas. En efecto, el aislamiento de una disciplina como la aritmética, la geometría, el álgebra, proviene del hecho que se procede por abstracción. Pero, así como un *objeto real* está compuesto de varias cualidades (color, peso, forma, etc.), en él convergen todas y pueden estudiarse abstractamente y por separado cada una de ellas como color, peso, forma, etc., así en una disciplina práctica deben converger varias disciplinas abstractas o elementos sacados de ellas. Si para componer una disciplina práctica se precisan elementos diversos de otras disciplinas, su probabilidad de desenvolvimiento es «dependiente» y puede aquél tener lugar solamente cuando las preparaciones colaterales necesarias se han efectuado.

Figura 16. Introduzione a "Sistema metrico decimal" tratta da Montessori, ed. spagnola (1934, p. 338).

MEDIDAS NO METRICAS NI DECIMALES

Las *medidas* y la precisión de determinar *unidades de medida* como puntos de partida para juzgar exactamente las *cantidades* en sí mismas, son la necesidad más fundamental de la vida social. La aritmética enseña en abstracto el juego de los números y nosotros aplicamos aquel juego a las realidades prácticas. Pero, ante todo, es necesario poner en vez de la unidad *uno*, de la serie de los números, *una cantidad real determinada y fija* de la cual se parte por *acumulación* para medir la cantidad precisa de las cosas. Esta es, para todas las aplicaciones, *la unidad de medida*.

También el dinero, por medio, del cual se compra y se vende, debe tener un valor fijado por el uso, y, bien determinado, debe basarse en una unidad de medida.

Figura 17. Le misure "non metriche o decimali" tratto da Montessori, 1934 (ed. spagnola), p. 369

ca" di Maria Montessori: nel penultimo capitolo si parla di unità di misura e di problematiche relative ai pesi ai volumi e alle densità, in un ordine e con delle motivazioni che rispecchiano fedelmente quelli del "Liber Abbaci" e della trattatistica d'abaco.

> Quando si entra in una disciplina attinente alla vita reale è necessario considerare le varie discipline coinvolte. Infatti, discipline come l'aritmetica, la geometria, l'algebra derivano dall'astrazione. Ma proprio come un oggetto reale è composto da varie qualità (colore, peso, forma, ecc.) che possono essere studiate separatamente e astrattamente, così anche una disciplina pratica è composta da elementi provenienti da altre discipline. Se per lo sviluppo della disciplina pratica sono necessari elementi di altre discipline, allora la possibilità di sviluppo dipende da questi e può avvenire solo dopo che sono stati fatti i relativi preparativi (Montessori 1934, p. 338; trad. degli autori).

Maria Montessori espone "la regola del tre" nell'ultimo capitolo di "Psicoaritmetica", dove parla di rapporti e proporzioni: spiega la regola fondamentale delle proporzioni, scrivendo i rapporti sotto forma di frazioni. Per quanto riguarda le proporzioni continue del tipo , ella parla di eguaglianza tra «un quadrato ed un rettangolo» perché è inevitabile pensare ad Euclide e alla frase di Fibonacci «come è dimostrato in aritmetica e in geometria», che testimonia l'uso della geometria nella comprensione dell'aritmetica e l'aspirazione dell'autrice di voler tornare all'origine delle cose.

Nel penultimo capitolo di "Psicoaritmetica" la dottoressa inserisce una parte relativa alle misure di valore e alla storia dei mezzi di scambio, con la seguente introduzione dove Maria Montessori afferma:

> Le misurazioni e la precisione nel determinare le unità di misura come punto di partenza per giudicare con precisione le quantità stesse sono il bisogno fondamentale della vita sociale. L'aritmetica insegna il gioco dei numeri in astratto e noi applichiamo quel gioco alle realtà pratiche. Ma soprattutto occorre mettere al posto dell'unità uno, della serie dei numeri, una quantità reale determinata e fissa da cui partire per accumulazione per misurare la quantità precisa delle cose. Questa è, per tutte le applicazioni, l'unità di misura. Anche il denaro, attraverso il quale viene comprato e venduto, deve avere un valore fissato dall'uso, e, ben determinato, deve basarsi su un'unità di misura (Montessori 1934, p. 369; traduzione degli autori).

Dopo aver caratterizzato la forma dei problemi da proporre agli studenti sulle unità di misura e sul valore, ella, facendo riferimento ad un testo di economia politica dell'epoca di Charles Gides (1911), riporta "un problema favola" tratto da un racconto di Cameron, che nei suoi viaggi in Africa aveva avuto contatto con società che praticavano il baratto. Il problema si ritrova "diagrammato" su "Psicoaritmetica" come raffigurato nelle Figure 18 e 19 tratte rispettivamente dall'edizione spagnola e italiana di "Psicoaritmetica". I dati del pro-

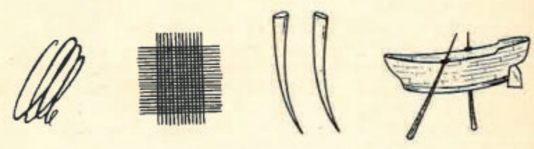
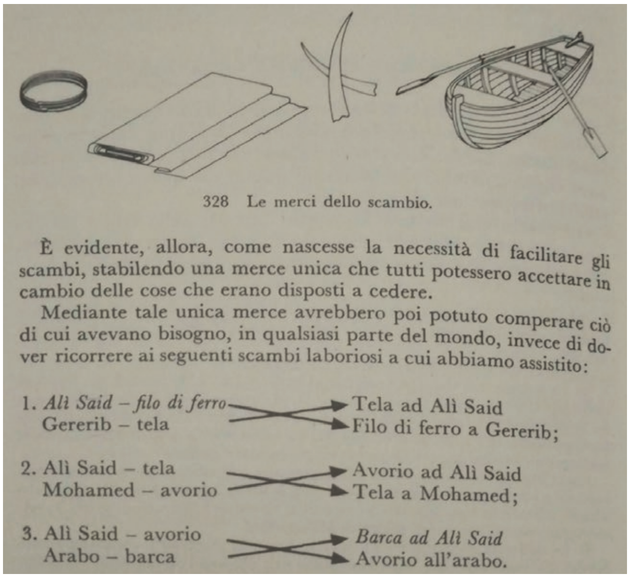


Fig. 300

Es evidente la necesidad de facilitar estos cambios encontrando una materia única que todos pueden aceptar a trueque del objeto que están dispuestos a vender, porque, con esta materia única, podrán después comprar lo que necesitan en cualquier parte del mundo, y entonces, en lugar de los cambios complicados de:

Alí-Said — alambre. Gererib — telas.	Telas a Alí-Said. Alambre a Gererib.
Alí-Said — telas. Mohamed — marfil.	Marfil a Alí-Said. Telas a Mohamed.
Alí-Said — marfil. Arabe — barca.	Barca a Alí-Said. Marfil al árabe.

Figura 18. Problema favola tratto da Montessori, 1934, p. 370.


328 Le merci dello scambio.

È evidente, allora, come nascesse la necessità di facilitare gli scambi, stabilendo una merce unica che tutti potessero accettare in cambio delle cose che erano disposti a cedere.

Mediante tale unica merce avrebbero poi potuto comperare ciò di cui avevano bisogno, in qualsiasi parte del mondo, invece di dover ricorrere ai seguenti scambi laboriosi a cui abbiamo assistito:

1. *Alì Said – filo di ferro* → Tela ad Alì Said
   Gererib – tela → Filo di ferro a Gererib;
2. Alì Said – tela → Avorio ad Alì Said
   Mohamed – avorio → Tela a Mohamed;
3. Alì Said – avorio → *Barca ad Alì Said*
   Arabo – barca → Avorio all'arabo.

Figura 19. Problema favola tratto da Montessori, 2003, p. 426.

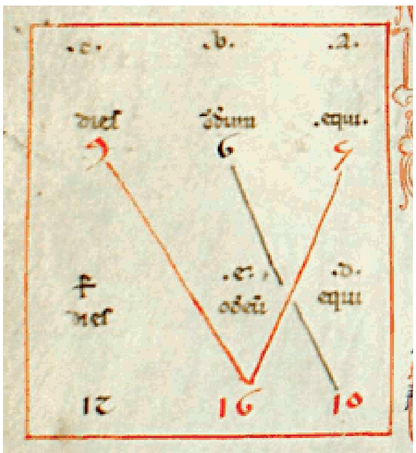


Figura 20. Diagramma del problema dell'orzo e dei cavalli nella pagina iniziale del capitolo nono parte terza del Liber Abbaci, Conv. Sopp. C.I. 2616, BNCF, folio 54 verso.

blema sono disposti in sei righe e due colonne, rappresentando le merci e gli acquirenti; le frecce rappresentano gli scambi.

Anche con "la regola del baratto", descritta nel paragrafo 3 del capitolo IX del "Liber Abbaci" i problemi di baratto vengono rappresentati, come illustrato nella figura seguente, con un diagramma, dove le sei quantità, le cinque note, più un'incognita, vengono riportate su tre colonne e due righe.

CONCLUSIONI

In questo articolo sono stati discussi diversi elementi che mostrano la presenza di oggetti matematici tipici della trattatistica d'abaco italiana sulla formazione matematica di Maria Montessori. In particolare, è stato possibile riconoscere l'influsso del Liber Abbaci di Leonardo Pisano Fibonacci in diverse proposte di "Psicoaritmetica". Altri oggetti dell'aritmetica pratica medievale descritta dal matematico pisano sono presenti nei testi della pedagogista e meriterebbero opportuni approfondimenti. Sarebbe necessario uno studio generale sulla sua formazione che chiarisca quali fonti abbia consultato per comprendere le riflessioni epistemologiche fatte dalla pedagogista utili alla definizione della sua teoria sul processo di insegnamento-apprendimento.

BIBLIOGRAFIA

Amante, Fedele. 1852. *Elementi di aritmetica,* Napoli: Dalla Reale Tipografia Militare.

Betti, Enrico, e Francesco Brioschi. 1868. *Gli elementi d'Euclide*: *con note, aggiunte ed esercizi ad uso de'ginnasi e de'licei*, Firenze: Le Monnier.

Boncompagni, Baldassarre, trad. 1857. *Liber abbaci*. Roma: Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Boscolo, Alessandra, Martina Crescenzi, e Benedetto Scoppola. 2021. "Sulla genesi e lo sviluppo del pensiero matematico di Maria Montessori". *Rivista di Storia dell'Educazione,* 8(2), 9-23.

Catastini, Laura e Ghione, Franco. 2023. *La matematica che trasformò il mondo: il Liber Abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci*. Milano: Carocci editore.

Cerasaro, Silvia. 2020. L'aritmetica con il Liber Abbaci di Fibonacci, *Periodico di Matematiche*, (3), 175-193.

De Freitas, Elizabeth e Nathalie Sinclair. 2012. "Diagram, gesture, agency: Theorizing embodiment in the mathematics classroom". *Educational Studies in Mathematics*, 80, 133-152.

Cipolla, Carlo Maria e Ignazio Visco. 1957. *Moneta e civiltà mediterranea*. Il Mulino.

Dehaene, Stanislas. 2009. *I neuroni della lettura*. Milano: Cortina (Orig. vers. Paris: Odile Jacob 2007).

Folkerts Menso. 2004. "Leonardo Fibonacci's Knowledge of Euclid's "Elements" and of Other Mathematical Texts", *Bollettino di storia delle scienze matematiche,* XXIV, 1, 93-113.

Gavagna, Veronica. 2013. "Leonardo Fibonacci", in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Il contributo italiano alla storia del pensiero, a cura di* Antonio

Clericuzio e Saverio Ricci, Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 192-195.

Giacardi, Livia. 2006. *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*. Parigi: Lumières Internationales.

Giacardi, Livia, e Roberto Scoth. 2013. "L'insegnamento della matematica nella scuola secondaria dall'inizio dell'Ottocento alla metà del Novecento in Italia". In *Handbook on the history of calculation education*, New York: Springer, 201-28.

Gide, Charles. 1911. *Principii di economia politica*. Milano: Vallardi.

Giusti, Enrico. 2016. "Matematica e commercio nel Liber Abaci". In *Ponte sul Mediterraneo*: *Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, a cura di Enrico Giusti e Raffaella Petti, 59-120.

Høyrup, Jens. 2005. "Leonardo Fibonacci and Abbaco culture. A proposal to invert the roles", in *Revue d'histoire des mathématiques*, 11, 23–56.

Høyrup Jens. 2019. "On Parts of Parts and Ascending Continued Fractions: an investigation of the Origins and Spread of a Peculiar System", In *Selected Essays on Pre- and Early Modern Mathematical Practice,* a cura di Jens Høyrup, New York: Springer, 31-57.

Mondini, Giovanni. 1849. *Trattato di aritmetica dimostrata*, Milano: Molina.

Montessori, Maria. 2012. *Psicogeometria*, a cura di Benedetto Scoppola, Roma: Opera Nazionale Montessori.

Montessori, Maria. 1934. *Psico Aritmética. La Aritmética desarrollada con arreglo a las directrices señaladas por la psicología infantil, durante veinticinco años de experiencia,* Barcelona, Araluce.

Montessori, Maria. 1971. *Psicoaritmetica*. Milano: Garzanti.

Nepero, John. 1628. *Rhabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo, proveniente dalla Biblioteca pubblica Bavarese*, Lugdunum, Petri Rammasem.

Pacioli Luca. 1523. *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita,* Toscolano: Paganini.

Pasquazi, Daniele. 2020. "Capacità sensoriali e approccio intuitivo-geometrico nella preadolescenza: un'indagine nelle scuole". *Cadmo: giornale italiano di pedagogia sperimentale*: 1, 79-96.

Peano, Giuseppe. 1924. *Giochi di Aritmetica e problemi interessanti*, Torino: Paravia.

Pepe, Luigi. 2016. *Insegnare matematica. Storia degli insegnamenti matematici in Italia,* Bologna: Clueb.

Scocchera, Augusto. 1993. Maria Montessori: il pensiero, il metodo : volume primo, Opera Nazionale Montessori (a cura di), in "*Maria Montessori: una biografia intellettuale*", Firenze, Giunti Lisciani, 7-62.

Tomassi, Laura. 2021. "Laboratori didattici tra storia e matematica ispirati al Liber Abaci", *Periodico di Matematiche*, 13, 5-23.

Tomassi, Laura. 2023. "I precursori medioevali dei compiti di realtà: le trame narrative che nascondevano i rapporti "proibiti" in matematica". *Periodico di Matematica,* anno XXXVIII, serie IV, vol. V(3) 169-195.

Scoppola, Benedetto. 2011. "Lezioni di Maria Montessori". *Annali di storia dell'educazione*, 18, 413-34.

Scoppola, Benedetto. 2022. *Più bravi di quel che pensiamo*. Milano: GEDI.

Trabalzini, Paola. 2007. "Maria Montessori: scienza e società". *Vita dell'infanzia*, LVI, n.3-4, 15-25.

Trabalzini, Paola. 2015. "Dimensioni della ricerca di Maria Montessori". In *Vita dell'infanzia*, LXIV, n.1-2/3-4, 38-43.